# 1. БИЛЕТ

## 1°

1.1. Привести определения абсолютной и условной сходимостей несобственных интегралов.

1.2. Сформулировать неравенство Чебышёва для ступенчатых функций.

1.3. Сформулировать определение пространства интегрируемых по Риману функций и интеграла Римана.

1.4. Сформулировать критерий интегрируемости Дарбу

## 2°

1.5. Задача. Докажите, что если $f_n \rightrightarrows f$ на множестве $X$ и функция $g$ ограничена на множестве $X$, то $f_n \cdot g \rightrightarrows f \cdot g$.

1.6. Задача. Докажите, что функция $\mathbb{R} \ni x \mapsto f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n \sin nx$, где $|q| < 1$, бесконечно дифференцируема.

1.7. Задача. Исследуйте функцию $f = x \ln(e + \sqrt{|xy|})$ на дифференцируемость в точке $(0, 0)$.

## 3°

1.8. Сформулировать и доказать теорему Вейерштрасса об экстремальных значениях.

1.9. Сформулировать и доказать теорему о равенстве вторых смешанных производных.

# 2. БИЛЕТ

## 1°

2.1. Привести определение множества нулевой меры и сформулировать их свойства.

2.2. Сформулировать условия применимости формулы замены переменной в интеграле Римана.

2.3. Сформулировать критерий интегрируемости Лебега.

2.4. Сформулировать вторую теорему о среднем.

## 2°

2.5. Задача. Исследовать на равномерную сходимость в промежутке $0 \le x \le 2\pi$ функциональный ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \sin nx}.$$

2.6. Задача. Пусть степенной ряд $\sum\limits_{n \ge 0} a_n x^n$ имеет радиус сходимости $R > 0$. Докажите, что функция $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ дифференцируема бесконечное число раз на интервале $(-R, R)$.

2.7. Задача. Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифференцируемая функция и $\mathrm{grad} f(x) = 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Докажите, что $f \equiv \mathrm{const}$.

## 3°

2.8. Сформулировать и доказать теорему о дифференцировании суперпозиции дифференцируемых отображений.

2.9. Сформулировать и доказать теорему об эквивалентных условиях компактности.

# 3. БИЛЕТ

## 1°

3.1. Сформулировать определение несобственного интеграла.

3.2. Привести признаки сходимости Абеля и Дирихле сходимости интегралов.

3.3. Привести формулу для нахождения длины кривой и сформулировать условия ее применимости.

3.4. Сформулировать определение интегральной нормы Римана.

## 2°

3.5. Задача. Пусть $r_1$ — радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=1} a_n x^n$, а $r_2$ — радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=1} b_n x^n$. Докажите, что если $r_1 \neq r_2$, то $r$ — радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=1} (a_n + b_n) x^n$, удовлетворяет равенству $r = \min(r_1, r_2)$.

3.6. Задача. Пусть последовательность функций $f_n$ поточечно сходится к функции $f$ на отрезке $[a, b]$. Причём функции $f_n$ удовлетворяют условию Липшица с одинаковой константой $L$. Докажите, что $f_n \rightrightarrows f$ на $[a, b]$.

3.7. Задача. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество и $f \in D^1(U; \mathbb{R})$. Докажите, что если $x_0 \in U$ — точка локального экстремума функции $f$, то $df(x_0) = 0$.

## 3°

3.8. Сформулировать и доказать теорему теорему Эйлера об однородных функциях.

3.9. Сформулировать и доказать теорему о дифференцируемости функции в точке, при условии непрерывности в этой точке ее частных производных.

## 4. БИЛЕТ

### 1°

4.1. Сформулировать признак сходимости Бертрана.

4.2. Сформулировать теорему Абеля о непрерывности степенного ряда на границе круга сходимости.

4.3. Сформулировать определения поточечной и равномерной сходимости последовательности функций и функционального ряда.

4.4. Сформулировать признак Вейерштрасса равномерной сходимости.

### 2°

4.5. Задача. Пусть $X$ — компактное метрическое пространство и последовательность $x_n \in X$ имеет единственную предельную точку $a \in X$. Докажите, что $x_n \to a$ при $n \to \infty$.

4.6. Задача. Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^n$ — выпуклое открытое множество и функция $f : U \to \mathbb{R}$ дифференцируема на $U$. Докажите, что для любых $x, y \in U$ найдётся такое $\xi \in U$, что справедливо равенство $f(x) - f(y) = \operatorname{grad} f(\xi)(x - y)$.

4.7. Задача. Исследуйте при каких $p$ сходится интеграл

$$\int_0^\infty x^{px}\, dx.$$

### 3°

4.8. Сформулировать и доказать формулу интегрирования по частям в интеграле Римана.

4.9. Сформулировать и доказать вторую теорему о среднем.

# 5. БИЛЕТ

## 1°

5.1. Сформулировать признак сходимости Гаусса.

5.2. Сформулировать свойства суммы степенного ряда. Какие операции арифметические можно совершать со степенными рядами?

5.3. Сформулировать критерий Коши равномерной сходимости ряда.

5.4. Сформулировать условия, гарантирующие непрерывность суммы функцинального ряда.

## 2°

5.5. Задача. Пусть $F$ — канторово множество. Докажите, что $\mathrm{Fr}(F) = F$.

5.6. Задача. Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^n$ — выпуклое открытое множество, функция $f : U \to \mathbb{R}$ дифференцируема на $U$ и $L = \sup\limits_{x \in U, i=1,\dots,n} |\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)|$. Докажите, что для любых $x, y \in U$ справедливо неравенство $|f(x) - f(y)| \leq L\|x - y\|_1$.

5.7. Задача. Исследуйте сходимость интеграла

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{x - \lfloor x \rfloor - 1/2}{\sqrt{x}}\, dx.$$

## 3°

5.8. Сформулировать и доказать формулу Ньютона — Лейбница.

5.9. Сформулировать и доказать критерий Лебега интегрируемости по Риману.

## 6. БИЛЕТ

### 1°

6.1. Сформулировать теорему Римана о перестановках условно сходящихся рядов.

6.2. Сформулировать теорему о произведении рядов.

6.3. Сформулировать теорему о перестановке пределов.

6.4. Сформулировать условия почленного дифференцирования функционального ряда.

### 2°

6.5. Задача. Докажите, что предельная точка множества $\mathrm{Lim}(A)$ является предельной точкой множества $A \subseteq X$.

6.6. Задача. Найдите предел $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{\cos(x^2+y)}{1-x^2y}\right)^{\frac{1}{x^4+y^2}}$ или докажите, что его не существует.

6.7. Задача. Пусть $f_n \in R[a,b]$ и $\|f_n - f\| \to 0$ при $n \to \infty$. Докажите, что $\int\limits_a^b f = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n$.

### 3°

6.8. Сформулировать определения абсолютной и условной сходимости несобственных интегралов, и доказать признак сравнения Вейерштрасса.

6.9. Сформулировать и доказать формулу замены переменной в интеграле Римана.

# 7. БИЛЕТ

## 1°

7.1. Сформулировать критерий Гейне непрерывности функции.

7.2. Привести описание компактных множеств в многомерных евклидовых пространствах.

7.3. Сформулировать определение дифференцируемости.

7.4. Сформулировать теорему о равенстве вторых смешанных производных.

## 2°

7.5. Задача. Будет ли интегрируема по Риману

$$f(x) = \operatorname{sgn} \sin \frac{1}{x} \ ?$$

7.6. Задача. Докажите, что $\int\limits_0^\infty \cos x^2 \, dx$ сходится и справедливо неравенство $\int\limits_0^\infty \cos x^2 \, dx \geq 0$.

7.7. Задача. Пусть $X, Y$ метрические пространства, $f : X \to Y$ непрерывная функция, $C \subset X$. Докажите, что $f(\overline{C}) \subset \overline{f(C)}$.

## 3°

7.8. Сформулировать и доказать I критерий интегрируемости по Риману в терминах колебаний.

7.9. Сформулировать и доказать теорему Дини о равномерной сходимости монотонной последовательности функций.

# 8. БИЛЕТ

## 1°

8.1. Сформулировать определение компактного метрического пространства.

8.2. Привести формулировку теоремы об эквивалентных условиях компактности.

8.3. Сформулировать понятие локального экстремума и привести необходимое условие экстремума дифференцируемой функции.

8.4. Сформулировать теорему Эйлера об однородных функциях.

## 2°

8.5. Задача. Пусть $f \in C[a,b]$ и для любой функции $\varphi \in \mathrm{Step}[a,b]$ справедливо равенство $\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = 0$. Докажите, что $f \equiv 0$.

8.6. Задача. Исследуйте при каких натуральных $n$ сходится интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{\sin^n x}{x}\,dx$.

8.7. Задача. Пусть $X$ — компактное метрическое пространство и последовательность $x_n \in X$ имеет единственную предельную точку $a \in X$. Докажите, что $x_n \to a$ при $n \to \infty$.

## 3°

8.8. Сформулировать определение длины параметризованной кривой и доказать формулу для нахождения длины непрерывно-дифференцируемой кривой.

8.9. Сформулировать и доказать теорему о почленном дифференцировании ряда.

# 9. БИЛЕТ

## 1°

9.1. Сформулировать определение равномерно непрерывного отображения и теорему Кантора.

9.2. Привести координатное представление дифференциала.

9.3. Сформулировать теорему о дифференцируемости композиции.

9.4. Сформулировать теорему о равенстве вторых смешанных производных.

## 2°

9.5. Задача. Вычислите $\frac{d}{dx}\int\limits_0^{x^2}\sqrt{1+t^3}dt$.

9.6. Задача. Исследуйте сходимость интеграла $\int\limits_1^{\infty}\frac{\sin x}{x+2\sin x}\,dx$.

9.7. Задача. Докажите, что если множество $A$ открыто, а $B$ замкнуто, то $B\setminus A$ — замкнуто.

## 3°

9.8. Сформулировать определение и свойства интегральной нормы. Доказать эти свойства.

9.9. Сформулировать и доказать признаки Абеля — Дирихле равномерной сходимости рядов.